

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

5-дәріс. Функция ұғымы. Функцияның нүктедегі шегінің Коши және Гейне бойынша анықтамасы

Дәрістің мақсаты – Функцияның үзіліссіздігінің Коши және Гейне бойынша анықтамаларын үйрену

Негізгі сұрақтар:

1. Функцияның нүктедегі шегінің Коши бойынша анықтамасы
2. Функцияның нүктедегі шегінің Гейне бойынша анықтамасы

1 Функцияның шегінің анықтамасы

$\mathbb{R}^n$ кеңістіктегі M_0 нүктесінің аймағында, M_0 нүктесінде де $y = f(M)$ функциясы анықталған болсын.

1.1 Анықтама 1 ($\varepsilon - \delta$ тілінде)

Сан A $y = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады ($M \rightarrow M_0$ үшін), егер

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(M) - A| < \varepsilon \quad \forall M : \rho(M, M_0) < \delta, M \neq M_0.$$

1.2 Мысал 1

Дәлелде:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Бұл $x = 3$ нүктесінде анықталмаған бір айнымалы функция. $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \varepsilon/2$ таңдап, теңсіздікті тексеруге болады.

1.3 Анықтама 2 (тізбектер тілінде)

Сан A $y = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады, егер кез келген $\{M_n\} \rightarrow M_0$, $M_n \neq M_0$ үшін, $\{f(M_n)\} \rightarrow A$.

1.4 Шектердің қасиеттері

1. Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$, және $f(x) \leq \varphi(x)$, $x \neq a$, онда $A \leq B$.
2. Егер $f(x) \leq \psi(x) \leq f(x)$, $x \neq a$, онда $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A$.
3. Тұрақтының шегі осы тұрақтының өзіне тең.
4. Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ және $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ ақырлы болса, онда:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,
 - (c) $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, C тұрақты.

2 Шексіз кіші және шексіз үлкен шамалар

2.1 Анықтама

Функция $\alpha(x)$ $x \rightarrow a$ кезінде шексіз кіші деп аталады, егер

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0,$$

ал $\beta(x)$ шексіз үлкен болса,

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty.$$

2.2 Теоремалар

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x)$, $\forall x \in u(a)$.
2. Егер $f(x)$ шектелген және $\lim \beta(x) = \infty$, $f(x) > M > 0$, онда $\lim \varphi(x) = 0$.
3. Егер $f(x)$ шектелген болса, онда $\lim [f(x) \cdot \alpha(x)] = 0$.
4. Егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)/\beta(x) = C \neq 0$, онда α және β бір ретті шексіз кіші, егер $C = 1$, онда $\alpha \sim \beta$.

2.3 Анықталмағандықтар

Негізгі анықталмағандықтар:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

3 Үзіліссіз функциялар

3.1 Анықтама 9

Функция $f(M)$ M_0 нүктесінде үзіліссіз, егер:

1. $f(M_0)$ анықталған,
2. $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ шегі бар,
3. $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

3.2 Анықтама 10 (өсімшесі арқылы)

Функция $y = f(x)$ x_0 нүктесінде үзіліссіз, егер

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0.$$

3.3 Мысалдар

- $y = x^2$ барлық $x \in \mathbb{R}$ үшін үзіліссіз.
- $y = \sin 5x$ барлық $x \in \mathbb{R}$ үшін үзіліссіз.

3.4 Үзіліс нүктелері

- Жөнделетін үзіліс: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ бар, бірақ $f(x_0)$ анықталмаған немесе $\lim \neq f(x_0)$.
- Бірінші түрдегі үзіліс: $f(x_0 - 0)$ және $f(x_0 + 0)$ табылған, бірақ олар тең емес.
- Екінші түрдегі үзіліс: $f(x)$ шегі жоқ немесе шексіздікке ұмтылады.

3.5 Үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1. $f(x)$ және $\varphi(x)$ үзіліссіз болса, онда $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$ үзіліссіз.
2. $f(x)$ үзіліссіз, $\varphi(t)$ үзіліссіз, онда $f(\varphi(t))$ үзіліссіз.

4 Кесіндідегі үзіліссіз функциялар

Анықтама 4.1. $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз, егер (a, b) аралығындағы барлық нүктелерде үзіліссіз және

$$f(a+0) = f(a), \quad f(b-0) = f(b).$$

4.1 Теоремалар

1. Егер $f \in C[a, b]$, онда f шектелген.
2. f $[a, b]$ кесіндісінде максимум M және минимум m мәндерін қабылдайды:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Функция шегі. Біржақты шектер

Айталық, $f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын.

Анықтама 4.2 (Шектік нүкте). Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында X жиынының x_0 өзгеше x нүктесі жатса, x_0 нүктесін X жиының *шектік нүктесі* деп атайды. Шектік нүкте X жиынында жатуы да, жатпауы да мүмкін.

X жиынынан x_0 -ке жинақты

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \neq x_0) \tag{1}$$

тізбегін аламыз, сәйкес функция мәндері

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \tag{2}$$

сан тізбегін құрады.

Анықтама 4.3 (Гейне бойынша шек). x_0 нүктесіне жинақты (1) тізбек бойынша құрылған (2) тізбек b санына жинақты болса, онда b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі немесе $x \rightarrow x_0$ шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad \text{немесе} \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow b.$$

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде жалғыз шегі бар, бұл $\{f(x_n)\}$ жинақты тізбектің жалғыз шегі болатынан шығады.

Анықтама 4.4 (Коши бойынша шек). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, кез келген $x \in X, x \neq x_0$ мәндерінде

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \quad (3)$$

теңсіздігі орындалса, b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі шегі деп атайды. Бұл анықтаманы функция шегінің “ ε - δ ” тіліндегі анықтамасы деп атайды.

Теорема 4.1. Функция шегінің бірінші және екінші анықтамасы эквивалентті.

5 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

[1] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002.

5

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005. 5

[3] Темірғалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы, 1991. 5

[4] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003. 5

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006 5

- [6] Сатығұлова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 5
- [7] Бурбаки Н. Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. -455 б. 5